



בחינת מתכונת במתמטיקה

כתה י"ב 5 יחידות לימוד

שאלון 582

שם התלמיד/ה	כתה	מס' עמודים להגשה	תרגילים להגשה	ציון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: 160 דקות.

ב. מבנה השאלון ומפתח הערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.

פרק ראשון - גיאומטריה אנליטית, וקטורים ומספרים מרוכבים.

פרק שני - חדו"א של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי.

(2) דפי נוסחות.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) עליכם לענות על שלש שאלות, חובה לבחור לפחות שאלה אחת מכל פרק.

(2) אל תעתיקו את השאלה; סמנו את מספרה בלבד.

(3) התחילו כל שאלה בעמוד חדש. רשמו במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבירו את כל פעולותיכם, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

(4) כתבו במחברת הבחינה בלבד. רשמו "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

(5) כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

(6) השאלות ייבדקו לפי הסדר שהוגשו. הקפידו להגיש 3 שאלות בלבד. אם תגישו יותר מ 3 שאלות, רק 3 השאלות

הראשונות ייבדקו.

בהצלחה!

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים ומספרים מרוכבים

1.

- נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$, $0 < p < 9$. הנקודה A נמצאת על הפרבולה ברביע הראשון. מרחק הנקודה A ממוקד הפרבולה הוא 5.
 א. הבע באמצעות p את שיעורי הנקודה A.
 ב. מצא משוואת ישר בעל שיפוע חיובי, המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ ונמצא במרחק $6\sqrt{2}$ ממרכז המעגל $x^2 - 16x + y^2 - 1 = 0$.
 ג. נסמן ב-F את מוקד הפרבולה $y^2 = 2px$ ונסמן ב-E את נקודת החיתוך של מדריך הפרבולה עם ציר ה-x.
 מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שסכום מרחקיהן מן הנקודות F ו-E שווה לקוטר המעגל שמשוואתו $x^2 - 16x + y^2 - 1 = 0$.

2.

ABCE היא פירמידה משולשת שקודקדיה A, B, ו-E מונחים על ציר ה-X, Y, ו-Z בהתאמה.

נתון: $CA=CB=CE=12$. כמו כן, נקודות M ו-N הן נקודות מפגש התיכונים של המשולשים EAB ו-ECA בהתאמה.

(1) כתוב הצגה פרמטרית של הישרים MN ו-CB ומצא מה היחס ההדדי בין שני ישרים אלו.

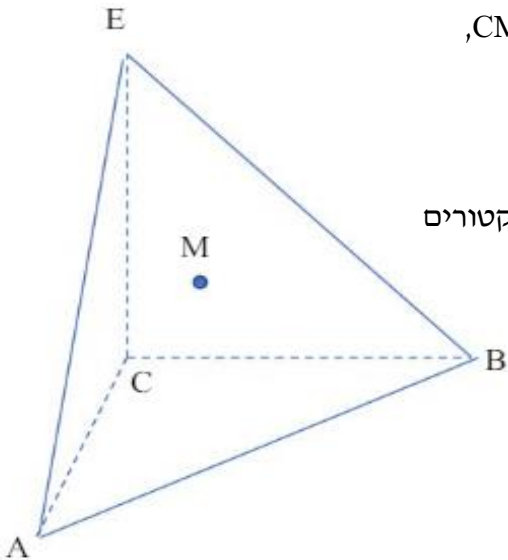
(2) מצא נקודה P שמונחת על ישר העובר דרך נקודה E ומקביל לישר CM, כך שMCEP היא מקבילית.

(3) מצא את המרחק מנקודה M לישר העובר דרך נקודות E ו-P.

(4) נקודה G מונחת על AB כך ש $AG=5GB$. חשב את הזווית בין הווקטורים

\vec{GC} ו- \vec{GM} . ואת שטח המשולש GMC.

(5) הוכיחו: \vec{MC} הוא נורמל המישור ABE.



z_1 ו- z_2 הם שני מספרים מרוכבים שונים.

נתון: $z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $z_2 = \cos \frac{7\alpha}{3} + i \sin \frac{7\alpha}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{z_1}{z_2}$ הוא מספר ממשי.

א. (1) מצא את α ואת $\frac{z_1}{z_2}$.

(2) הראה כי $z_1 \cdot z_2$ הוא מספר מדומה.

נתון: $w = \frac{z_1}{z_2} + z_1 \cdot z_2$.

ב. מצא את כל פתרונות המשוואה $z^3 = w^6$.

ג. (1) ייצג את הפתרונות שקיבלת במישור גאוס והוכח שהנקודות המתאימות לפתרונות המשוואה הם

קודקודיו של משולש שווה צלעות במישור של גאוס.

(2) הפתרונות שמצאת מהווים 3 קודקודים מבין 6 קודקודים של משושה משוכלל במישור של

גאוס. מצא את שיעוריהם של שאר קודקודי המשושה.

פרק שני – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה $f(x) = 1 + ae^{-2x}$ המוגדרת לכל x . a הוא פרמטר, $a > 1$.

בטא את תשובותיך באמצעות a , לפי הצורך.

א. (1) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$? נמק את תשובתך.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

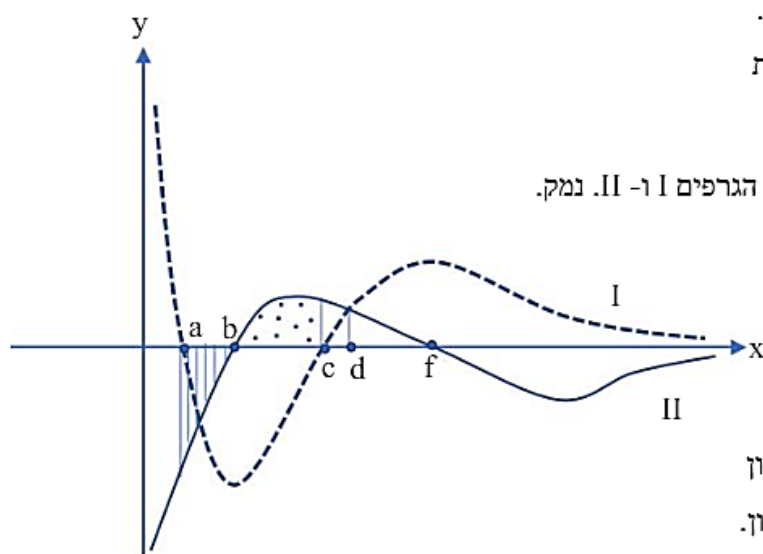
(3) ידוע כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת פיתול אחת, המתקבלת כאשר $x = \frac{\ln(a)}{2}$.

מצא את שיעור ה- y של נקודת הפיתול, וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. (1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g'(x)$.

(2) סרטט את גרף הפונקציה $g'(x)$. פרט את שיקוליך.

ד. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g'(x)$ ועל ידי הישרים $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$.



הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגזירה בתחום $x > 0$.
 בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות
 $f(x)$ ו- $f'(x)$.

א. התאם לכל אחת מן הפונקציות את אחד מן הגרפים I ו-II. נמק.

היעזר בשיעורי הנקודות שסומנו על
 ציר ה- x וענה על סעיפים ב', ג' וד':

ב. הראה שהשטח המקווקו בציור
 שווה לשטח המנוקד.

ג. (1) מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון

של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוג הקיצון.

(2) כמה נקודות הפיתול יש הפונקציה $f(x)$? נמק.

ד. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $x > 0$ ומקיימת: $g'(x) = f(x)$.

גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא מתחת לגרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $c < x < f$.

הישר $x = t$, $c < t < f$ חותך את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בנקודות A ו-B

בהתאמה. מצא את הערך של t עבורו אורך הקטע AB מקסימלי.

$$ה. נתון: $f(x) = \frac{(\ln x)^2 - 1}{x}$$$

(1) מצא את a , b , c ו- f .

(2) גרף הפונקציה $g(x)$ עובר דרך נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$.

מצא את הפונקציה $g(x)$.

"צמיח חסוב יותר מיצה. יצה הוא מואבל. צמיח הוא אינסופי"

אלברט איינשטיין

