

מתכונת 2 שאלון 572 יב' 5 יח"ל

בהצלחה רבה ל: _____

השאלות עליהן בחרתי לענות:

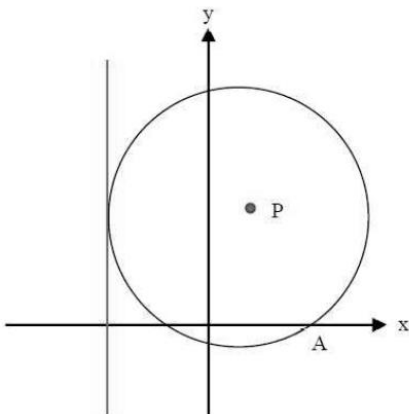
הוראות:

- משך המבחן: שלוש שעות (לבעלי תוספת זמן: שלוש שעות ארבעים וחמש דקות).
- יש להסביר את דרך הפתרון ולפרט את החישובים. תשובות ללא חישוב/נימוק לא יתקבלו.
- חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון לא גרפי. דף נוסחאות מצורף לשאלון.

בהצלחה רבה

הנחיות מענה: יש לענות על שלוש מבין חמשת השאלות הבאות.

פרק ראשון – מספרים מרוכבים וגיאומטריה אנליטית



1. מעגל שמרכזו בנקודה P משיק לישר $x = -4$ ועובר בנקודה $A(4; 0)$ (ראו ציור).

א. מצאו את המקום הגאומטרי של הנקודות P המקיימות תנאים אלו.

ב. אחת מן הנקודות המקיימות את התנאים הנ"ל היא הנקודה M . נקודה M נמצאת גם על הישר $y = 12$.

מצאו את משוואת המעגל שמרכזו M .

ג. המשיק למעגל M בנקודה A חותך את המקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א' בנקודה B הנמצאת ברביע הרביעי.

שטח המשולש ΔMAB הוא 676.

(1) חשבו את מרחק נקודה B מן הישר $x = -4$.

(2) מצאו את משוואת המעגל החוסם את המשולש ΔMAB .

2. בציר שלפניכם נתונה התיבה $ABCD A' B' C' D'$. המקצועות DA, DC ו- DD' מונחים על הצירים x, y, z .

ע-ו- z בהתאמה, כמתואר בציר.

נתון: $AA' = 3, DA = 4$.

נסמן: $AB = a$. $a > 0$ הוא פרמטר.

הנקודות L, N, P ו- K נמצאות על מקצועות התיבה

AA', DC, BC ו- $A'B'$ בהתאמה

כך שמתקיים: $AP = 2PA'$,

$N(0, 5, 0)$

L אמצע המקצוע BC ,

$$\vec{A'K} = \frac{4}{5} \vec{DN}$$

א. מצאו את משוואת המישור PNK .

ב. (1) מצאו הצגה פרמטרית של הישר NK ושל הישר PL . אם צריך, הביעו באמצעות a .

(2) האם לישרים NK ו- PL יש נקודת חיתוך? נמקו.

ג. (1) עבור איזה ערך של a $\angle PC'C = 82.1^\circ$? בתשובתכם השאירו שתי ספרות אחרי הנקודה

העשרונית.

(2) האם קיים a שעבורו $\angle PC'C = 90^\circ$? נמקו.

3. נתונה המשוואה $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

א. פתרו את המשוואה ורשמו בהצגה טריגונומטרית את הפתרונות שלה.

נסמן כל אחד מהפתרונות הנייל על ידי $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ בהתאמה לסדר העולה של

הארגומנט של כל אחד מהם.

ב. חשבו את מכפלת הפתרונות $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot z_5 \cdot z_6$.

ג. (1) הסבירו מדוע הנקודות במישור גאוס המייצגות את הפתרונות של המשוואה נמצאות על

מעגל, ומצאו את משוואתו.

(2) הפתרונות של המשוואה מייצגים קודקודים של מצולע במישור גאוס. האם המצולע

משוכלל? נמקו תשובתכם.

מכפילים ב- $\cos \alpha + i \sin \alpha$, $(0 < \alpha < 90^\circ)$, כל אחד מן המספרים המייצגים את הקודקודים

z_2, z_4, z_6 של המצולע הנייל.

הנקודות במישור גאוס המייצגות את התוצאות שהתקבלו לאחר ההכפלה והפתרונות שהתקבלו

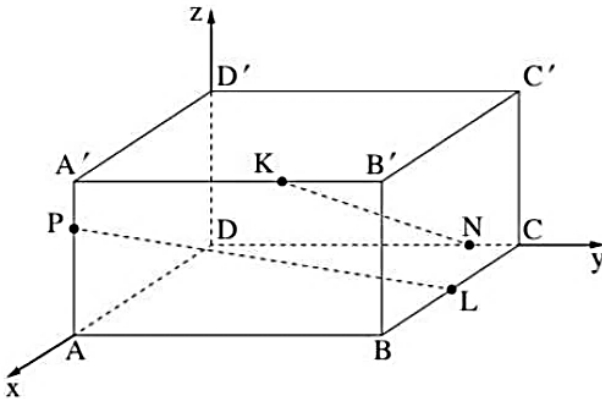
בסעיף א' ($z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$) יוצרות מצולע משוכלל בעל 9 צלעות במישור גאוס.

ד. חשבו את α .

פתרונות המשוואה $z^9 - (a + bi) = 0$ הם בדיוק כל המספרים המייצגים את הקודקודים של

המצולע המשוכלל שהתקבל לעיל.

ה. מצאו את a ו- b .



פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{-x} + x \cdot e^x$. למשוואה $f'(x) = 0$ יש פתרון אחד.
- א. הוכיחו שנקודת הקיצון היחידה של הפונקציה $f(x)$ נמצאת על ציר ה- y וקבעו את סוגה.
- ב. קבעו האם לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית. נמקו קביעתכם.
- ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ד. נתונה הפונקציה $g(x) = e^x(x-1) - e^{-x}$.
1. הסבירו מדוע גרף הפונקציה $g(x)$ עולה לכל x .
2. קבעו האם יש לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אופקית.
3. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין הצירים והישר $x = 1$.
- ו. נתונה הפונקציה $h(x) = x \cdot g(x)$. עבור כל טענה קבעו האם היא נכונה או שגויה. נמקו תשובתכם.
- i. לפונקציה $h(x)$ ו- $g(x)$ יש שתי נקודות חיתוך שאחת מהן נמצאת ברביע הרביעי.

$$\int_0^1 h(x) dx > \int_{-1}^0 (h(x) - g(x)) dx \quad \text{ii}$$

5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{a}{x}$ הוא פרמטר חיובי.

- א. העזרו בפרמטר a במידת הצורך ועבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצאו את:
- (1) תחום הגדרה.
 - (2) שיעורי נקודת הקיצון וסוגה.
 - (3) שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים (אם יש כאלה).
 - (4) תחומי העלייה והירידה.
 - (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
- ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

$$\text{נתונה הפונקציה: } g(x) = \frac{\ln x}{x}$$

- ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (2) הוכיחו כי $f(x) > g(x)$ לכל ערך של x בתחום ההגדרה של שתי הפונקציות.
- (3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
- (4) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- (5) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים (אם יש כאלה).
- (6) מצאו אסימפטוטות מקבילות לצירים של הפונקציה.
- (7) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- ד. נתון: $\int_{e-1}^1 f(x) dx = \int_1^e g(x) dx$. מצאו את ערכו של הפרמטר a .
- ה. (1) הוכיחו כי $g'(x) > f'(x)$ לכל ערך של x בתחום ההגדרה של שתי הפונקציות.

$$(2) \text{ נתון: } \int_1^b (g'(x) - f'(x)) dx = \frac{1}{2}. \text{ חשבו את } b.$$