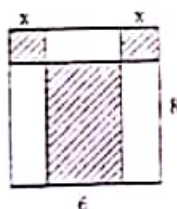


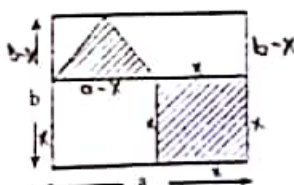
עבודת קיץ – בעיות קיצון (4 יחידות)

1. מבין כל זוגות המספרים שהפרש ביניהם 4, מצא את זוג המספרים שסכום ריבועיהם מינימלי.
תשובה: 2, -2.
2. מבין כל זוגות המספרים החיוביים שסכומם 10, מצא את זוג המספרים שמכפלת ריבועו של האחד בחזקה השלישית של השני היא מקסימלית.
מצא גם את המכפלה המקסימלית.
תשובה: 4, 6, 3456.
3. מבין כל שלשות המספרים החיוביים שסכומם $9a$ ($a > 0$), וש אחד מהם גדול פי שניים מהשני, מצא את המספרים שמכפלתם מקסימלית.
תשובה: $3a$, $2a$, $4a$.
4. חותכים חוט שאורכו 80 ס"מ לשני חלקים. מכל אחד מהחלקים מכינים ריבוע. מה צריך להיות אורך כל אחד מהחלקים, כדי שסכום השטחים של שני הריבועים יהיה מינימלי?
תשובה: 40 ס"מ, 40 ס"מ.
5. סכום אורכי האלכסונים במעוין הוא 6 ס"מ. מה צריך להיות אורכו של כל אלכסון כדי ששטח המעוין יהיה מקסימלי?
תשובה: 3 ס"מ, 3 ס"מ.



- בחלון מלבני שממדיו 8 מטרים ו-6 מטרים רוצים להרכיב זכוכית משני סוגים: בשטחים המקווקווים המורכבים משני ריבועים שצלעם x וממלבן נוסף רוצים להרכיב זכוכית צבעונית. ובשטחים הלבנים שבציור רוצים להרכיב זכוכית שקופה (ראה ציור).
א. מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח הזכוכית השקופה יהיה מקסימלי?
ב. מהו השטח המקסימלי של הזכוכית השקופה?

תשובה: א. 2.75 מטר. ב. 30.25 מ"ר.



- בתוך מלבן שאורכו a ורוחבו b חסומים ריבוע ומשולש מקווקווים.
מה צריך להיות אורך צלע הריבוע כדי שסכום השטחים של הריבוע והמשולש יהיה מינימלי? הבע על ידי a ו- b .

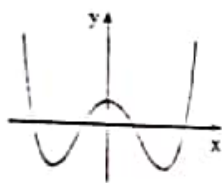
תשובה: $\frac{a-b}{6}$

9. נתונה הפונקציה $y = x^2 - 4x^2$.
 א. חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, נקודות חיתוך עם הצירים.
 ב. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
 ג. מצא לאילו ערכים של k , הפונקציה חותכת את הישר $y = k$:
 (1) ב-4 נקודות. (2) ב-3 נקודות. (3) ב-2 נקודות. (4) באף נקודה.
10. לפונקציה $f(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 + mx - 10$ יש נקודת קיצון ב- $x = 1$.
 א. מצא את m .
 ב. מצא את נקודות המקסימום והמינימום של הפונקציה, ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ג. מצא כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) - 13 = 0$.

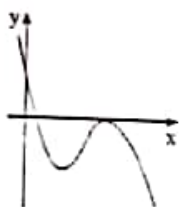
תשובות:



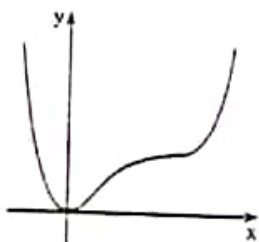
5. א. כל x .
 ב. (2;16) מקסימום, (-2;-16) מינימום.
 ג. עלייה: $-2 < x < 2$, ירידה: $x < -2$ או $x > 2$.
 ד. (0;0), (3.464;0), (-3.464;0).



6. א. כל x .
 ב. (3;-49) מינימום, (0;32) מקסימום.
 ג. עלייה: $x > 3$ או $-3 < x < 0$, ירידה: $0 < x < 3$ או $x < -3$.
 ד. (0;32), (4;0), (-4;0), (sqrt(2);0), (-sqrt(2);0).

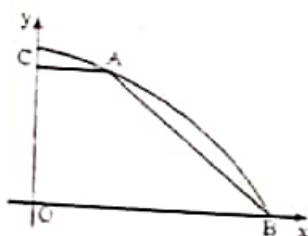


7. א. תחום הגדרה: כל x .
 נקודות קיצון: (3;-32) מינימום, (7;0) מקסימום.
 ג. עלייה: $3 < x < 7$, ירידה: $x < 3$ או $x > 7$.
 נקודת חיתוך: (0;49).
 ד. בשתי נקודות.



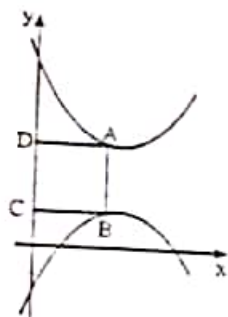
8. א. כל x .
 ב. (0;0) מינימום.
 ג. עלייה: $x > 0$, ירידה: $x < 0$.
 ד. (0;0).

9. א. תחום הגדרה: כל x . נקודות קיצון: (sqrt(2);-4) מינימום, (0;0) מקסימום.
 ג. (sqrt(2);-4) מינימום, נקודות חיתוך: (2;0), (0;0), (-2;0).
 ב. חיוביות: $x > 2$ או $x < -2$, שליליות: $-2 < x < 2$, $x = 0$.
 ג. (1) $-4 < k < 0$, (2) $k = 0$, (3) $k > 0$ או $k = -4$, (4) $k < -4$.



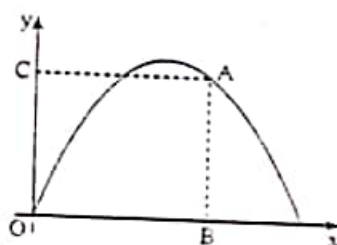
8. נקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $y = -x^2 - 81$.
 ברביע הראשון. הקטע AC מקביל לציר ה-x.
 מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A,
 כדי ששטח הטרפז ישר-הזווית ABOC
 יהיה מקסימלי.

תשובה: (3;72).



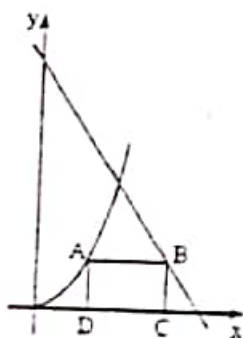
9. נקודה A נמצאת על הפונקציה $y = x^2 - 3x - 9$.
 נקודה B נמצאת על הפונקציה
 $y = -x^2 - 3x - 2$ ברביע הראשון. הקטע AB מקביל
 לציר ה-y. הנקודות C ו-D נמצאות על ציר ה-y
 כך ש-ABCD מלבן. מצא מה צריכים להיות שיעורי
 הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מינימלי.

תשובה: (1.25;6.8125).



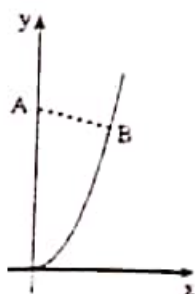
10. בנקודה הנמצאת על הפרבולה $y = -x^2 - 5x$,
 בקטע $0 \leq x \leq 5$, מורידים אנכים לצירים,
 כך שנוצר מלבן ABOC (ראה ציור).
 מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A
 א. כדי שהיקף המלבן יהיה מקסימלי?
 ב. כדי שהיקף המלבן יהיה מינימלי?

תשובה: א. (3;6). ב. (0;0).



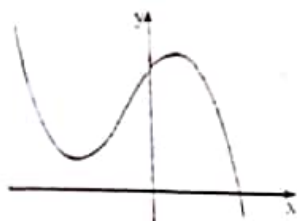
11. מתבוננים בכל המלבנים ABCD החסומים ברביע
 הראשון בין גרף הפרבולה $y = x^2$, הישר $y = -2x - 14$
 וציר ה-x, כמתואר בציור.
 א. שיעורי הקדקוד D הם $(x_0; 0)$.
 הבע את שיעורי הקדקוד A ואת שיעורי
 הקדקוד B באמצעות x_0 .
 ב. מהו הערך של x_0 במלבן בעל השטח המקסימלי?

תשובה: א. $A(x_0; x_0^2)$, $B\left(\frac{14 - x_0^2}{2}; x_0^2\right)$. ב. $x_0 = 2$.



12. לפניך חלק של הפרבולה שמשוואתה $y = x^2$.
 הנמצא ברביע הראשון. נתון: $A(0; 4\frac{1}{2})$.
 א. מצא על הפרבולה את הנקודה B,
 כך שריבוע המרחק AB הוא מינימלי.
 ב. הראה כי המשיק לפרבולה בנקודה B,
 שאותה מצאת בסעיף א', ניצב לישר AB.

תשובה: א. (2;4).



10. א. 3.
 ב. $(1; 11\frac{2}{3})$ מקסימום, $(-3; 1)$ מינימום.
 ג. פתרו אחד.

11. הפונקציה $y = x^3 - 15x^2 + 48x - 3$ מוגדרת בקטע $[0; 11]$.
 א. מצא את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה.
 ב. הסבר מדוע גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בשלוש נקודות שונות.
 תשובה: א. 41, -67.

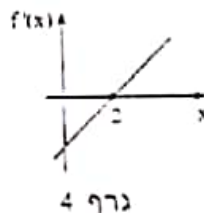
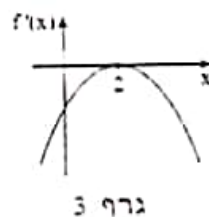
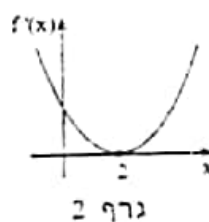
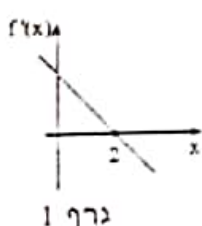
12. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $y = (x^2 - 8)^5$ בנקודה $x = 3$.
 תשובה: $y = 30x - 89$.

13. לגרף הפונקציה $y = (x - 4)^3$ מעבירים שני משיקים בעלי שיפוע 3.
 א. מצא את שיעורי נקודות ההשקה.
 ב. מצא את משוואות המשיקים.

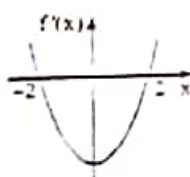
תשובה: א. $(-3; 1)$, $(-5; -1)$. ב. $y = 3x - 10$, $y = 3x - 14$.

14. מצא עבור הפונקציה $y = (x^2 - 6x)^3$:
 א. נקודות מינימום ומקסימום.
 ב. תחומי עלייה וירידה.
 ג. נקודות חיתוך עם הצירים.
 ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

15. לפונקציה $f(x)$ יש רק נקודת קיצון אחת והיא נקודת מקסימום ב- $x = 2$.
 א. מהו הסימן של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור $x < 2$?
 ב. איזה מן הגרפים הבאים (1, 2, 3, 4) יכול לתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$? נמק את בחירתך.



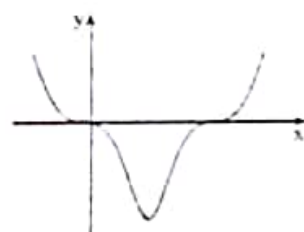
16. לפונקציה $g(x)$ יש שתי נקודות קיצון בלבד. נקודת מקסימום ב- $x = -1$ ונקודת מינימום ב- $x = 5$. שרטט גרף של הפונקציה הנגזרת $g'(x)$.



17. בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$.
 א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
 ב. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוג הקיצון.
 ג. נתון גם: $f(0) = 0$. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

18. נתונה הפונקציה $y = x^2 - 4ax - 5a^2$, $a > 0$.
- מצא תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים (במידת הצורך, הבע תשובותיך באמצעות a).
 - שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - נתון כי המרחק בין שתי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x הוא 8. מהי נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה- y ?

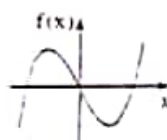
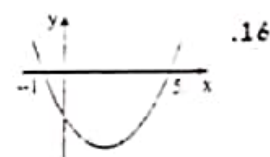
תשובות:



14. א. $(3; -729)$ מינימום.

- ב. עלייה: $x > 3$, ירידה: $x < 3$.
ג. א. $(0;0)$, $(6;0)$.

15. א. חיובי. ב. גרף 1.

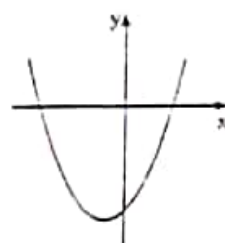


ג.

17. א. עלייה: $x > 2$ או $x < -2$,

ירידה: $-2 < x < 2$.

- ב. $x = -2$ מקסימום, $x = 2$ מינימום.



18. א. תחום הגדרה: כל x .

נקודות קיצון: $(-2a; -9a^2)$ מינימום.

תחומי עלייה: $x > -2a$, תחומי ירידה: $x < -2a$.

נקודות חיתוך: $(-5a; 0)$, $(a; 0)$, $(0; -5a^2)$.

ג. $(0; -8\frac{8}{9})$.

חשבון דיפרנציאלי – פולינומים (4 יחידות)

①

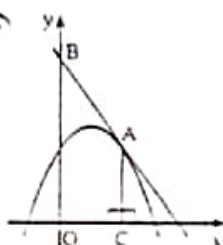
הישר $y=5$ חותך את הפרבולה $y=x^2-1$ בשתי נקודות.
א. מצא את משוואות המשיקים לפרבולה בנקודות אלה.
ב. מצא את נקודת החיתוך בין שני המשיקים שמצאת בסעיף א.

תשובה: א. $y=4x-3$, $y=-4x-3$ ב. $(0, -3)$.

②

לגרף הפונקציה $y=-x^2-2x-3$ מעבירים משיק בנקודה $A(2;3)$. המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה B . מנקודה A מורידים אנך AC לציר ה- x . חשב את שטח הטרפז $ABOC$ (O - ראשית הצירים).

תשובה: 10.



3. הישר $y=2x+4$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x^2-8x+c$. מצא את ערכו של c .

תשובה: 13.

4. לגרף הפונקציה $y=ax^2-1$ מעבירים משיק בנקודה $x=1$.
א. הבע באמצעות a את משוואת המשיק.
ב. המשיק שמצאת בסעיף א' חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=2$. מצא את a .

תשובה: א. $y=2ax-1-a$ ב. $-\frac{1}{3}$.

חקור את הפונקציות הבאות על פי הסעיפים הבאים ומצא:
א. תחום הגדרה. ב. נקודות מינימום ומקסימום. ג. תחומי עלייה וירידה.
ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטט את גרף הפונקציה.

5. $y=x(12-x^2)$ 6. $y=x^4-18x^2-32$

⑦

נתונה הפונקציה $f(x)=-x^3+15x^2-63x-49$.
א. חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y .
ב. הראה שאחת מנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x היא $(1;0)$.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. כמה נקודות משותפות יש לגרף הפונקציה ולציר ה- x ?

8. חקור את הפונקציה $y=3x^4-8x^3+6x^2$ ומצא: א. תחום הגדרה. ב. נקודות מינימום ומקסימום. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

*
חוקה לפתור את
השאלה: איך?
= 10!
השאר רשור.